Soluzioni estese di equazioni di dominio

Fabio Alessi

Università di Udine

Titolo 2:

I λ-modelli costruiti per le prove semantiche di easiness sono soluzioni estese di equazioni di dominio

Fabio Alessi

Dipartimento di Matematica e Informatica

via delle Scienze 208

33100 - Udine

email: alessi@dimi.uniud.it

1. Intersection Type Structure classiche: introduzione
2. Intersection Type Structures ristrette
3. indagine sui modelli che consentono di provare per via semantica la easiness di λ-termini (E easy $\Leftrightarrow$ $\forall M \in \Lambda.\lambda\beta + \ E = M$ è consistente).
4. generalizzazione della tecnica di Dana Scott (limite diretto in **ALG**^{ep}) per risolvere

$$X \simeq [X \to X]$$

Bibliografia parziale

- Baeten, Baerboom: Ω *can be anything it should not be* - 1979
- Van Bakel: *Principal Type Schemes for the Strict Type Assignment System*, J. Logic Comp. 1993
- Honsell/Ronchi della Rocca: appunti non pubblicati.
- Alessi, Dezani-Ciancaglini, Honsell: *Filter models and easy terms*, ICTCS 2001
- Alessi, Lusin: *Simple easy terms*, ITRS 2002
- Alessi, Dezani-Ciancaglini, Lusin: *Intersection Types and domains operators* TCS 2004
- Berline, Salibra: *Easiness in graph models*, 2005, accettato su TCS
- Plotkin: *Pisa Notes*, 1993.

Punto 1: ITS classiche

Intersection Type Structures:

1. Linguaggio di tipi:

$$A = \Omega \mid \varphi \mid A \to A \mid A \cap A \quad (\varphi \in C)$$

2. Preordine sui tipi: assiomi e regole $\triangledown$ contengono $\overline{\triangledown}$:

(refl) $A \leq A$

(idem) $A \leq A \cap A$

(incl$_L$) $A \cap B \leq A$

(incl$_R$) $A \cap B \leq B$

(mon) $\dfrac{A \leq A' \quad B \leq B'}{A \cap B \leq A' \cap B'}$

(trans) $\dfrac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C}$

(Ω) $A \leq \Omega$

(Ω-η) $\Omega \leq \Omega \to \Omega$

($\to$-$\cap$) $(A \to B) \cap (A \to C) \leq A \to (B \cap C)$

(η) $\dfrac{A' \leq A \quad B \leq B'}{A \to B \leq A' \to B'}$

Type Assignment System

(Ax) $\dfrac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}$ (→I) $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \rightarrow B}$

(Ax-Ω) $\Gamma \vdash M : \Omega$ (→E) $\dfrac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$

($\leq$) $\dfrac{\Gamma \vdash M : A \quad A \leq B}{\Gamma \vdash M : B}$ ($\cap$I) $\dfrac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash M : A \cap B}$

Filter Models

Un filtro su Σ^∇ è un sottinsieme di tipi X tale che:

1. $\Omega \in X$
2. $A \leq B$ e $A \in X$ implica $B \in X$;
3. se $A, B \in X$, allora $A \cap B \in X$

$\mathcal{F}^\nabla$ è l'insieme dei filtri su Σ^∇, ordinati per inclusione.

Notazione: $\uparrow Z$ è il filtro generato da Z, per ogni sottinsieme di tipi Z.

Applicazione fra filtri: $X \cdot Y = \{B \mid \exists A \in Y. A \to B \in X\}$

Interpretazione λ-termini: $[\![\, M \,]\!]^\nabla_\rho = \{A \mid \exists \Gamma \models \rho. \Gamma \vdash M : A\}$

Proprietà

- "·" induce due funzioni $F^{\nabla} : \mathcal{F}^{\nabla} \to [\mathcal{F}^{\nabla} \to \mathcal{F}^{\nabla}]$ e $G^{\nabla} : [\mathcal{F}^{\nabla} \to \mathcal{F}^{\nabla}] \to \mathcal{F}^{\nabla}$:

$$F^{\nabla}(X) = \lambda Y.X \cdot Y$$
$$G^{\nabla}(f) = \uparrow \{A \to B \mid B \in f(\uparrow A)\}$$

- $[\mathcal{F}^{\nabla} \to \mathcal{F}^{\nabla}] \trianglelefteq \mathcal{F}^{\nabla}$, poiché $F^{\nabla} \circ G^{\nabla} =$ *Id*

- $[\![\ \ ]\!]^{\nabla}$ *coincide* con l'interpretazione indotta da F^{∇} e G^{∇}:

$[\![x]\!]_{\rho} = \rho(x)$;

$[\![MN]\!]_{\rho} = F^{\nabla}([\![M]\!]_{\rho})([\![N]\!]_{\rho})$;

$[\![\lambda x.M]\!]_{\rho} = G^{\nabla}(\lambda\!\!\lambda X.[\![M]\!]_{\rho[x/X]})$

Punto 2: ITS ristrette

Restrizione 1: Strong Intersection Type Structures (Alessi, Dezani-Ciancaglini, Honsell, Lusin: ~ 2002): $\bigtriangledown$ può solo contenere, oltre a $\overline{\bigtriangledown}$, *solo* assiomi di questa forma:

1. $\varphi \leq \psi$;
2. $\varphi \sim \psi \to A$

+ ulteriori vincoli.

Svantaggi: si perde generalità (ma si riescono a descrivere ugualmente i modelli più importanti);

Vantaggi di ordine tecnico: prove più semplici, vale sempre il Generation Theorem.

Restrizione 2: Strict Intersection Type Structure (Steffen van Bakel: 1993).

- Tipi stretti $\mathcal{T}_s$: $\sigma = \varphi \mid (\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_n) \to \sigma_{n+1} \quad (n \geq 0)$

- Tipi intersezione di Van Bakel: $\mathcal{T}$ = chiusura per intersezione di $\mathcal{T}_s$. Ω è abbreviazione di $\bigcap_{\emptyset} \sigma_i$.

- *Preordine su* $\mathcal{T}$ deve soddisfare (refl), (idem), (incl$_L$), (incl$_R$), (mon), (trans), (Ω), (ossia tutti assiomi e regole di [BCD] che *non* coinvolgono i tipi freccia).

- Type assignment: vedi dopo

- Filter model: definito come nel caso classico

Type Assignment System per Strict Types

(→I) $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash_s M : \sigma}{\Gamma \vdash_s \lambda x.M : A \to \sigma}$ (∩E) $\dfrac{x : \sigma_1 \cap \ldots \cap \sigma_n \in \Gamma}{\Gamma \vdash_s x : \sigma_i}$ $(n \geq 2)$

(→E) $\dfrac{\Gamma \vdash_s M : \sigma_1 \cap \ldots \cap \sigma_n \to \tau \quad \Gamma \vdash_s N : \sigma_i}{\Gamma \vdash_s MN : \tau}$ $(n \geq 0)$.

Proprietà: Se $\Gamma \vdash M : \sigma$ nel [BCD], allora la derivazione può essere condotta anche nel sistema stretto, derivando per M un tipo $\sigma' \leq \sigma$.

Restrizione 3: Prime Intersection Type Structure

- Tipi primi: $\mathcal{T}_s$: $\sigma = \varphi \mid (\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \ldots \cap \sigma_n) \to \sigma_{n+1} \quad (n \geq 0)$
- Tipi intersezione: $\mathcal{T}$: $A = \sigma \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n \quad (n \geq 0)$ ($\Omega = \bigcap_{\emptyset}$)

Def. $Pr(\sigma) = \{\sigma\}, Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Pr(A_i)$

Differenze da van Bakel:
- il preordine è definito sui *tipi primi*
- 3 soli assiomi/regole: (refl), (trans), (hoare)

$$\text{(hoare)} \quad \frac{B \leq_H A \quad \alpha \leq \beta}{A \to \alpha \leq B \to \beta}$$

dove $A \leq_H B$ se e solo se $\forall \tau \in Pr(B). \exists \sigma \in Pr(A). \sigma \leq \tau$.

Type Assignment System per Prime ITS

(→I) $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash_s M : \sigma}{\Gamma \vdash_s \lambda x.M : A \to \sigma}$ (≤) $\dfrac{\Gamma \vdash M : \alpha \quad \alpha \leq \beta}{\Gamma \vdash_s M : \beta}$

(∩E) $\dfrac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash_s x : \alpha} \quad (\alpha \in Pr(A))$

(→E) $\dfrac{\Gamma \vdash_s M : A \to \tau \qquad \Gamma \vdash_s N : \alpha \ \ (\forall \alpha \in Pr(A))}{\Gamma \vdash_s MN : \tau} \quad (n \geq 0)$.

Filtri modelli $\mathcal{F}^\nabla$: definiti come nel caso classico

Interpretazione dei termini nei filtri modelli primi:

$[\![M]\!]^\nabla_\rho = \uparrow \{\bigcap_{i\in I} \alpha_i \mid \forall i.\exists \Gamma_i \models \rho.\Gamma_i \vdash_s M : \alpha_i\}$

Essendo la maggior parte dei λ-modelli primi algebrici, si può semplificare la loro descrizione usando Prime ITS.

- Vantaggio: dimostrazioni/derivazioni in alcuni casi molto più semplici.

- Svantaggio: (pare che) non si possono descrivere tutte le teorie catturate nel caso generale.

Un esempio: la descrizione di D_∞ (Scott).

- F: funtore delle endofunzioni continue: $F(X) = [X \to X]$.

-
$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & D_\infty = \varinjlim T & & \\
T = & D_0 \arrow[r, "\langle i_0, j_0 \rangle"'] \arrow[urr] & F(D_0) \arrow[r, "F(\langle i_0, j_0 \rangle)"'] \arrow[u] & F^2(D_0) \arrow[ul] & \ldots
\end{tikzcd}$$

con $D_0 = \{\bot, \top\}$, e $i_0(\bot) = \bot \Rightarrow \bot$, $i_0(\top) = \bot \Rightarrow \top$

- D_∞ soddisfa l'equazione di dominio $X \simeq [X \to X]$.

- Presentazione con i tipi intersezione

1. tipi: $A = \Omega \mid \omega \mid A \cap A \mid A \to A$;
2. assiomi e regole: (refl), (idem), (incl$_L$), (incl$_R$), (mon), (trans), (Ω), (Ω-η), ($\to$-$\cap$), (η), (ω), dove:
   $(\omega) \quad \omega \sim \Omega \to \omega$.

- Presentazione con i tipi primi: Σ^0

1. tipi primi: $\sigma = \omega \mid \sigma_1 \cap \ldots \cap \sigma_n \to \sigma_{n+1}$;
2. assiomi e regole:
   (refl) (hoare) $\dfrac{\omega \leq \sigma}{\omega \leq A \to \sigma} \quad \dfrac{\Omega \leq_H A \quad \sigma \leq \omega}{A \to \sigma \leq \omega}$

Punto 3: filtri modelli per easiness

Prova semantica della easiness di $\Delta\Delta \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

tecnica (Alessi-Dezani)-Honsell-Ronchi

Obbiettivo: dato un qualunque λ-termine M, costruire un modello $\mathcal{F}^{\bigtriangledown}$ tale che $[\![\ \Delta\Delta\ ]\!]^{\bigtriangledown} = [\![\ M\ ]\!]^{\bigtriangledown}$.

- Dominio base: $\Sigma^{(0)}$ (in $\mathcal{F}^{(0)}$, $[\![\ \Delta\Delta\ ]\!]^{(0)} = \uparrow \Omega$).
- Data $\Sigma^{(n)}$ si costruisce $\Sigma^{(n+1)}$:

passo 1: si determina

$W_n = \{\sigma \mid \vdash^n M : \sigma\} \setminus \{\sigma \mid \vdash^{n-1} M : \sigma\}$.

passo 2: $T^{n+1} = T^n \cup \{\chi_\sigma \mid \sigma \in W_n\}$

$\bigtriangledown^{n+1} = \bigtriangledown^n \cup \{\chi_\sigma \sim \chi_\sigma \to \sigma \mid \sigma \in W_n\}$

Proprietà: Le interpretazioni $[\![\Delta\Delta]\!]^{(n+1)}$ contengono tutti i tipi delle $[\![M]\!]^{(n)}$ (e nulla più):

$$[\![\Delta\Delta]\!]^{(n+1)} = [\![M]\!]^{(n)}$$

Definendo allora:
- $T^\star = \bigcup_n T^n$
- $\bigtriangledown^\star = \bigcup_n \bigtriangledown^n$

si ottiene $\Sigma^\star$, tale che, in $\mathcal{F}^\star$,

$$[\![\Delta\Delta]\!]^\star = [\![M]\!]^\star$$

$\mathcal{F}^\star$ è un λ-modello che eguaglia $\Delta\Delta$ e M.

$\mathcal{F}^\star$ è un limite di limiti:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathcal{F}^\star & & & & & & \\
 & D_\infty = \mathcal{F}^0 \arrow[urrrr] \arrow[rrrr] & & & & \mathcal{F}^1 \arrow[u] \arrow[rrrr] & & & & \mathcal{F}^2 \arrow[ullll] & & \cdots \\
D_0^{(0)} \arrow[r] \arrow[ur] & D_1^{(0)} \arrow[r] \arrow[u] & D_2^{(0)} \arrow[ul] & \cdots & D_0^{(1)} \arrow[r] \arrow[ur] & D_1^{(1)} \arrow[r] \arrow[u] & D_2^{(1)} \arrow[ul] & \cdots & D_0^{(2)} \arrow[r] \arrow[ur] & D_1^{(2)} \arrow[r] \arrow[u] & D_2^{(2)} \arrow[ul] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Punto 4: soluzioni estese per $X \simeq F(X)$

<u>Costruzione alternativa di un modello simile</u>

- a livello (0): $i_0^{(0)} : \{\perp, \top\} = D_0^{(0)} \to F(D_0^{(0)})$ secondo Scott
- $D_0^{(n+1)} = [D_0^{(n)} \to D_0^{(n)}] \cup \{z_p \mid p \in [\![M]\!]_0^{(n)}\}$
- $i_0^{(n+1)} : D_0^{(n+1)} \to D_1^{(n+1)} = [D_0^{(n+1)} \to D_0^{(n+1)}]$:

$$i_0^{(n+1)}(x) = \begin{cases} z_p \Rightarrow p & \text{se } x = z_p, p \in [\![M]\!]_0^{(n)} \\ i_1^{(n)}(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Detta $T^{(n)}$ la torre corrispondente,

$$D_\infty^{(n)} = \varinjlim T^{(n)}$$

Costruzione del limite “diagonale”

$$
\begin{tikzcd}
D_0^{(0)} \arrow[r] & D_1^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & D_2^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & D_3^{(0)} \arrow[r] \arrow[d] & D_4^{(0)} \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & D_\infty^{(0)} \arrow[d] \\
& D_0^{(1)} \arrow[r] & D_1^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & D_2^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & D_3^{(1)} \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & D_\infty^{(1)} \arrow[d] \\
& & D_0^{(2)} \arrow[r] & D_1^{(2)} \arrow[r] \arrow[d] & D_2^{(2)} \arrow[rr, dashed] \arrow[d] & & D_\infty^{(2)} \arrow[d] \\
& & & D_0^{(3)} \arrow[r] & D_1^{(3)} \arrow[rr, dashed] & & D_\infty^{(3)} \arrow[d, dashed] \\
& & & & & & \tilde{D}
\end{tikzcd}
$$

Domande:

- $\mathcal{F}^\star \simeq \tilde{D}$?

- $\tilde{D} \simeq [\tilde{D} \to \tilde{D}]$?

- I diagrammi

$$\begin{array}{ccc} D_1^{(n)} & \longrightarrow & D_2^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_0^{(n+1)} & \longrightarrow & D_1^{(n+1)} \end{array}$$

commutano?

- Le mappe fra i $D_n^{(i)}$ sono funzioni Scott continue?

- Come costruiamo $D_0^{(n)}$??

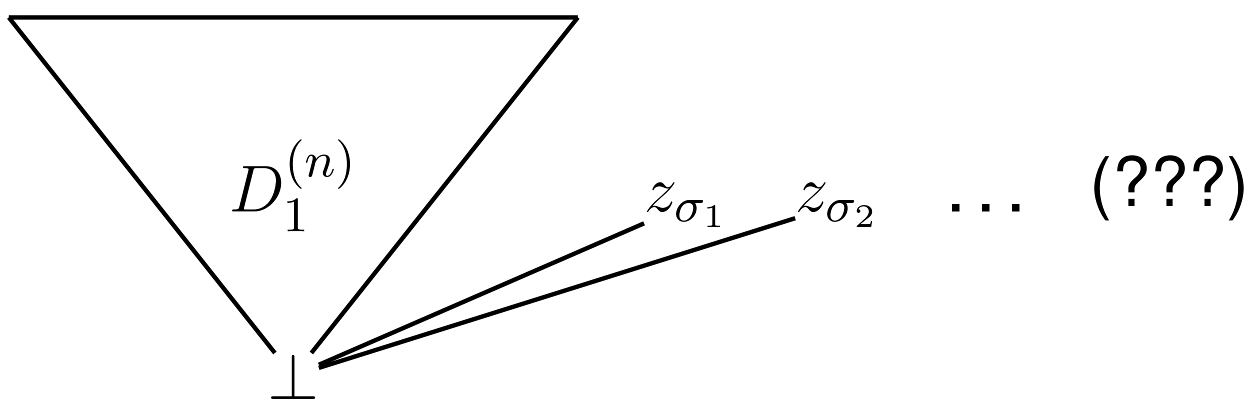
$$D_0^{(n+1)} = D_1^{(n)} \cup \{ z_p \mid p \in [\![\, M \,]\!]_0^{(n)} \}$$

$$i_0^{(n+1)}(x) = \begin{cases} z_p \Rightarrow p & \text{se } x = z_p, p \in [\![\, M \,]\!]_0^{(n)} \\ i_1^{(n)}(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rispetto alla relazione d'ordine, dove si situano i punti z_p?

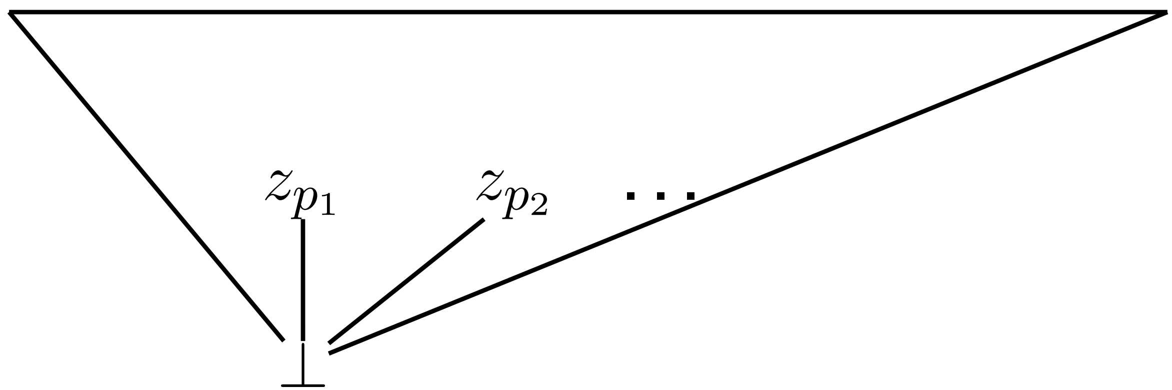
È vero che

$D_0^{(n+1)}$ =



NO! feedback fra costruzione di $D_0^{(n+1)}$ e $i_0^{(n+1)}$.

Struttura di $D_0^{(n+1)}$:



La collocazione precisa degli elementi z_p si determina sfruttando la presentazione di $D_0^{(n+1)}$ mediante Prime Intersection Types Structures.

Qualche risposta:

- Le mappe fra i $D_n^{(i)}$ sono funzioni Scott continue? Sì

- I diagrammi
$$\begin{tikzcd} D_1^{(n)} \arrow[r] \arrow[d] & F(D_1^{(n)}) \arrow[d] \\ D_0^{(n+1)} \arrow[r] & F(D_0^{(n+1)}) \end{tikzcd}$$
commutano? Sì

- $\tilde{D} \simeq [\tilde{D} \to \tilde{D}]$? Sì, grazie al punto precedente

- $\mathcal{F}^\star \simeq \tilde{D}$? Problema aperto.

Torri “estese”: $T^e = \langle D_1^{(n)}, h_n \circ i_n \rangle_n$, tali che i rombi commutano

$$
\begin{tikzcd}
 & D_0^{(n+1)} \arrow[dr, "i_{n+1}"] & & D_0^{(n+2)} \arrow[dr, "i_{n+2}"] & \\
\dots D_1^{(n)} \arrow[ur, "h_n"] \arrow[dr, "F(i_n)"'] & & F(D_0^{(n+1)}) = D_1^{(n+1)} \arrow[ur, "h_{n+1}"] \arrow[dr, "F(i_{n+1})"'] & & F(D_1^{(n+1)}) = D_1^{(n+2)} \dots \\
 & F(D_1^{(n)}) \arrow[ur, "F(h_n)"'] & & F(D_1^{(n+1)}) \arrow[ur, "F(h_{n+1})"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sia $\tilde{X} = \varinjlim T^e$. Allora (se F funtore continuo)

$$\tilde{X} \simeq F(\tilde{X})$$

Le torri classiche sono un caso particolare di torri estese

$$
\begin{tikzcd}
 & D_0^{(n+1)} = D_1^{(n)} \arrow[dr, "i_{n+1}"] & \\
\ldots D_1^{(n)} \arrow[ur, "\mathit{Id}"] \arrow[dr, "F(i_n)"'] & & F(D_1^{(n)}) = D_1^{(n+1)} \ldots \\
 & F(D_1^{(n)}) \arrow[ur, "F(\mathit{id})"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ricerche future:

Descrivere attraverso la Domain Theory:

1. strutture più complesse non descrivibili (al momento) attraverso Prime ITS che emergono nel caso di prove semantiche di easiness di altri λ-termini.
2. I graph model di Salibra-Berline.

La tecnica messa a punto generalizza il forcing: applicazioni ad altri ambiti?